Παρασκευή 12/04/2019

Ορισμός: Έστω φ απεικόνιση από την ομάδα G στην ομάδα G'. Η φ ονομάζεται ομομορφισμός ομάδων αν $\varphi(a *_1 b) = \varphi(a) *_2 \varphi(b)$ για κάθε $a, b \in G$.

π.χ.

$$\mathbb{R}^* \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$\varphi(a) = \ln(|a|)$$

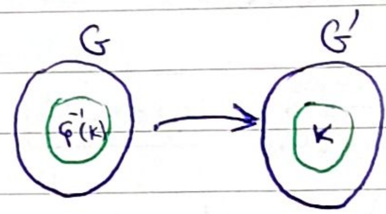
$$\varphi(a \cdot b) = \ln(|a \cdot b|) = \ln(|a| \cdot |b|) = \ln(|a|) + \ln(|b|) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

φ ομομορφισμός

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων. Τότε:

1) $\varphi(e) = e'$
2) $(\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$, $\forall a \in G$
3) Αν $H \leq G$ τότε $\varphi(H) \leq G'$
4) Αν $K \leq G'$ τότε $\varphi^{-1}(K) \leq G$.

$\varphi^{-1}(K) = \{a \in G \mid \varphi(a) \in K\}$.



Απόδειξη:

$\varphi(e) = e' \in K \Rightarrow e \in \varphi^{-1}(K) \Rightarrow \varphi^{-1}(K) \neq \emptyset$.

Έστω $x, y \in \varphi^{-1}(K) \Rightarrow \varphi(x) \in K$, $\varphi(y) \in K$

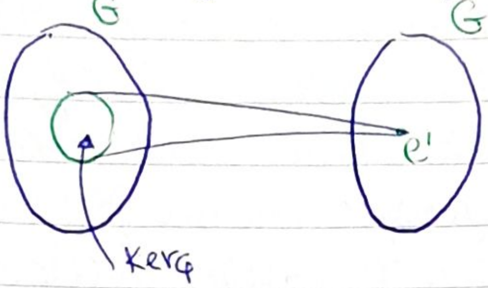
$$\left.\begin{array}{r} \varphi(xy^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(y^{-1}) = \varphi(x)(\varphi(y))^{-1} \\ \varphi(x) \in K \\ \varphi(y) \in K \\ K \leq G' \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(xy^{-1}) \in K \Rightarrow xy^{-1} \in \varphi^{-1}(K) \Rightarrow \varphi^{-1}(K) \leq G$$

Έστω $\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων.

$\{e'\} \leq G'$ $\quad \varphi^{-1}(\{e'\}) \leq G'$

$$\varphi^{-1}(\{e'\}) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}.$$

Ορισμός: Έστω φ: ομομορφισμός από την ομάδα G στην ομάδα G'. (Το σύνολο) $\varphi^{-1}(\{e'\}) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$ ονομάζεται πυρήνας του φ και συμβολίζεται $\mathrm{Ker}\varphi$. Αποδείξαμε ότι $\mathrm{Ker}\varphi \leq G$



Άσκηση: Βρείτε τον πυρήνα του ομομορφισμού $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$\varphi(a) = \ln(|a|)$

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in \mathbb{R}^* \mid \varphi(a) = 0\} = \{a \in \mathbb{R}^* \mid \ln(|a|) = 0\} = \{a \in \mathbb{R}^* \mid |a| = e^0 = 1\}$$
$$= \{1, -1\}.$$

Άσκηση: Βρείτε τον πυρήνα του ομομορφισμού $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$
$\varphi((x,y,z)) = (x-3y,\ 2x-6y+z,\ 7z,\ -x+3y+11z)$.

$$\mathrm{Ker}\varphi = \langle (3,1,0) \rangle = \{\lambda(3,1,0)\} \qquad \begin{cases} x-3y=0 \\ 2x-6y+z=0 \\ 7z=0 \\ -x+3y+11z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ένας ομομορφισμός ομάδων $\varphi: G \to G'$ είναι ένα προς ένα απεικόνιση αν-ν $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$.

Απόδειξη:

$(\rightarrow)$ $\varphi: 1\text{-}1$ $\quad \varphi(e) = e' \Rightarrow e \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \{e\} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$

Έστω $x \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(x) = e' = \varphi(e) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(e) \overset{\varphi:1\text{-}1}{\Rightarrow} x = e \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi \subseteq \{e\}$
$\Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$.

$(\leftarrow)$ $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$

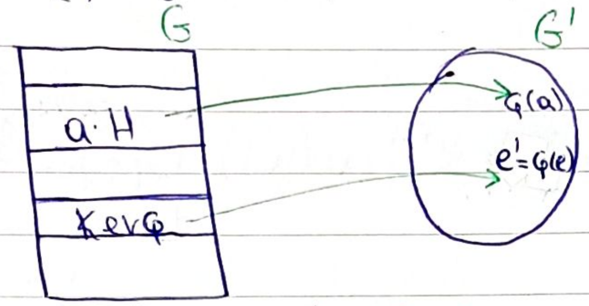
$$\left.\begin{array}{l} \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a)\cdot\varphi(b)^{-1} = \varphi(b)\cdot\varphi(b)^{-1} = e' \\ \varphi(ab^{-1}) = e' \Rightarrow a\cdot b^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi = \{e\} \\ ab^{-1} = e \Rightarrow (a\cdot b^{-1})b = eb \Rightarrow a = b \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi: 1\text{-}1$$

Βρείτε τον πυρήνα του ομομορφισμού $S_n \to \mathbb{Z}_2$

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} [0]_2, & \text{αν } \sigma \in A_n \to \text{άρτιες μεταθέσεις} \\ [1]_2, & \text{αν } \sigma \in B_n \to \text{περιττές μεταθέσεις} \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\varphi = A_n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων, $H = \mathrm{Ker}\varphi$ και $a \in G$. Τότε το σύνολο $\varphi^{-1}(\{\varphi(a)\}) = \{x \in G \mid \varphi(x) = \varphi(a)\}$ είναι το αριστερό σύμπλοκο $a \cdot H$ της H που περιέχει το a. Επίσης $\varphi^{-1}(\{\varphi(a)\}) = Ha$, δηλαδή $aH = Ha$, για κάθε $a \in G$.



Απόδειξη:

Έστω $ah \in aH \Rightarrow \varphi(a \cdot h) = \varphi(a) \cdot \varphi(h) = \varphi(a)e' = \varphi(a) \Rightarrow a \cdot h \in \varphi^{-1}(\{\varphi(a)\})$

Άρα $aH \subseteq \varphi^{-1}(\{\varphi(a)\})$.

Έστω $g \in \varphi^{-1}(\{\varphi(a)\}) \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)^{-1}\varphi(g) = \varphi(a)^{-1}\varphi(a)$

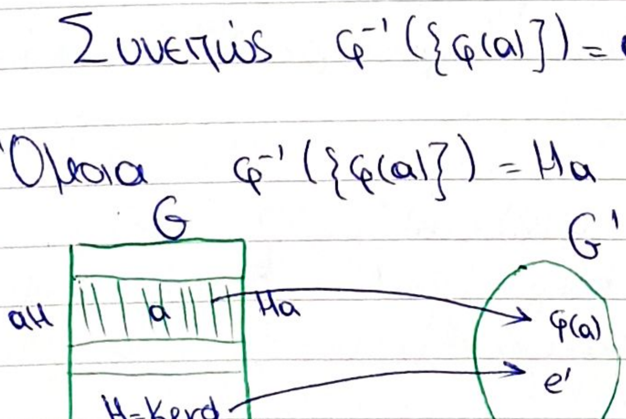
$\Rightarrow \varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(g) = e' \Rightarrow \varphi(a^{-1}g) = e' \Rightarrow a^{-1}g \in H = \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow a^{-1}g = h \in H$

$\Rightarrow a \cdot a^{-1}g = ah \Rightarrow g = a \cdot h \in aH$

Άρα $\varphi^{-1}(\{\varphi(a)\}) \subseteq aH$

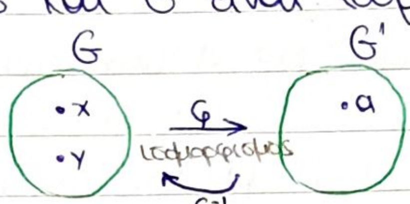
Συνεπώς $\varphi^{-1}(\{\varphi(a)\}) = aH$.

Όμοια $\varphi^{-1}(\{\varphi(a)\}) = Ha$. Άρα $Ha = \varphi^{-1}(\{\varphi(a)\}) = aH$.



Ορισμός: Μια υποομάδα H μιας ομάδας G λέγεται κανονική υποομάδα της G αν $aH=Ha$ για κάθε $a\in G$.

Ορισμός:
- Ένας ομομορφισμός ομάδων που είναι 1-1 απεικόνιση λέγεται μονομορφισμός.
- Ένας ομομορφισμός ομάδων που είναι επί απεικόνιση λέγεται επιμορφισμός.
- Ένας ομομορφισμός ομάδων που είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός λέγεται ισομορφισμός.
- Αν υπάρχει ισομορφισμός από την ομάδα G στην G' λέμε ότι οι ομάδες G και G' είναι ισόμορφες και συμβολίζουμε $G\cong G'$



σχέση ισοδυναμίας

$G\cong G'$ $\quad \varphi: G\to G'$

$\varphi^{-1}: G'\to G$

$\varphi(x)=a \overset{op}{\Leftrightarrow} \varphi^{-1}(a)=x$

$\varphi(y)=b \overset{op}{\Leftrightarrow} \varphi^{-1}(b)=y$

$\varphi(xy)=a\cdot b \Leftrightarrow \varphi^{-1}(ab)=xy$

Έστω $a,b\in G'$ $\varphi^{-1}(ab)=xy=\varphi^{-1}(a)\cdot\varphi^{-1}(b)$

Άρα $\varphi^{-1}: G\to G'$ είναι ομομορφισμός

φ^{-1}: 1-1 και επί

$\Downarrow$

$\boxed{\varphi^{-1} \text{ ισομορφισμός}}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω S ένα σύνολο από ομάδες. Η σχέση $G_1\cong G_2$ (G_1 ισόμορφη με την G_2) είναι σχέση ισοδυναμίας.

$G \xrightarrow[I(g)=g]{I} G$ $\quad I$: 1-1 $(I(a)=I(b)\Rightarrow a=b)$

I: επί $(I(g)=g\in G)$ $\quad I$ ισομορφισμός $\quad G\cong G$ ανακλαστική

$I(ab)=ab=I(a)\cdot I(b)$

Συμμετρική: Αν $G_1\cong G_2$ υπάρχει $\varphi: G_1\to G_2$ ισομορφισμός $\Rightarrow G_2\cong G_1$

$\varphi^{-1}: G_2\to G_1$

φ^{-1} ισομορφισμός $\Rightarrow G_2\cong G_1$

Μεταβατική: Αν $G_1\cong G_2$ και $G_2\cong G_3$

$f: G_1\to G_2$ ισομορφισμός $\quad h\circ f\ G_1\to G_3$ ισομορφισμός $\Rightarrow G_1\cong G_3$

$h: G_2\to G_3$ ισομορφισμός

$h\circ f(ab)=h(f(ab))=h(f(a)\cdot f(b))=h(f(a))\cdot h(f(b))=h\circ f(a)\cdot h\circ f(b).$

ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ KLEIN

$$V_4 = \{ I, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{ ([0]_2,[0]_2), (1,0), (0,1), (1,1) \}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$U(\mathbb{Z}_8) = \{ [1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8 \}$$

Οι τρεις ομάδες είναι ισόμορφες μεταξύ τους

$$V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong U(\mathbb{Z}_8)$$

Όλες είναι αβελιανές με 4 στοιχεία

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $G_1 \cong G_2$. Η G_1 είναι αβελιανή αν-ν η G_2 είναι αβελιανή.

Απόδειξη:

$G_1 \cong G_2$ υπάρχει ισομορφισμός $\varphi: G_1 \to G_2$ και $\varphi^{-1}: G_2 \to G_1$

($\longrightarrow$) G_1 αβελιανή. Έστω $a, b \in G_2$. $ab \underset{\text{επί}}{\overset{\varphi}{=}} \varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(xy) \overset{G_1 \text{ αβελιανή}}{=} \varphi(yx) = \varphi(y)\cdot\varphi(x) = b\cdot a$

$\exists x, y \in G_1$ τ.ω $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$

($\longleftarrow$) G_2 αβελιανή. Έστω $a, b \in G_1$ $ab \underset{\text{επί}}{\overset{\varphi^{-1}}{=}} \varphi^{-1}(x)\cdot\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(yx) = \varphi^{-1}(y)\cdot\varphi^{-1}(x) = b\cdot a$

$\exists x, y \in G_2$ τ.ω $\varphi^{-1}(x) = a$, $\varphi^{-1}(y) = b$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $G_1 \cong G_2$. Η G_1 είναι κυκλική αν-ν η G_2 είναι κυκλική.

Απόδειξη:

($\longrightarrow$) G_1 κυκλική $\Rightarrow G_1 = \langle a \rangle$

Έστω $b \in G_2 \underset{\text{επί}}{\overset{\varphi}{\Rightarrow}} \exists x \in G_1$ τ.ω $b = \varphi(x)$

$x \in G_1 = \langle a \rangle \Rightarrow x = a^n \Rightarrow b = \varphi(x) = \varphi(a^n) = (\varphi(a))^n$ $\quad G_2 \subseteq \langle \varphi(a) \rangle \subseteq G_2$

Άρα $\langle \varphi(a) \rangle = G_2$

($\longleftarrow$) Όμοια

Πρόταση: Έστω $\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός. Αν το $a \in G$ έχει τάξη n τότε το $\varphi(a)$ έχει τάξη διαιρέτη του n

Απόδειξη:

$o(a) = n$, $a^n = e \Rightarrow \varphi(a^n) = \varphi(e) \Rightarrow \varphi(a)^n = e' \Rightarrow o(\varphi(a)) \mid n = o(a)$

για εξεταστική

Πρόταση. Έστω $\varphi: G \to G'$ ισομορφισμός. Αν το $a \in G$ έχει τάξη n τότε το $\varphi(a)$ έχει τάξη n.

φ ισομορφισμός $\Rightarrow \varphi$ ομομορφισμός $\Rightarrow o(\varphi(a)) \mid n = o(a)$
φ^{-1} ισομορφισμός $\Rightarrow \varphi^{-1}$ ομομορφισμός $\Rightarrow o(\underbrace{\varphi^{-1}(\varphi(a))}_{= o(a)}) \mid o(\varphi(a))$

$\Big\}\ o(a) = o(\varphi(a))$

Άσκηση. Είναι η $\varphi: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2$ με $\varphi([n]_8) = [n]_2$ ομομορφισμός ομάδων;

$\varphi([a+b]_8) = [a+b]_2 = [a]_2 + [b]_2 = \varphi([a]_8) + \varphi([b]_8)$

Άρα φ ομομορφισμός. φ-καλά ορισμένη.

Είναι η $\varphi: \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_7$ με $\varphi([n]_{15}) = [n]_7$ ομομορφισμός;

$\varphi([a+b]_{15}) = [a+b]_7 = [a]_7 + [b]_7 = \varphi([a]_{15}) + \varphi([b]_{15})$

ΠΡΟΣΟΧΗ! η φ δεν είναι απεικόνιση

Έστω $[m]_8 = [n]_8 \Rightarrow m \equiv n \bmod 8$ $\boxed{m = 8k + n}$

$\varphi([n]_8) = [n]_2$ $[8k]_2 = [0]_2$

$\varphi([m]_8) = [m]_2 = [8k+n]_2 = [n]_2$